Buletin Ilmiah Mat. Stat. dan Terapannya (Bimaster)
Volume 04, No. 2 (2015), hal 119 – 126.

FUNGSI DOMINASI ROMAWI PADA *LINE GRAPH*

Yesi Januarti, Mariatul Kiftiah, Nilamsari Kusumastuti

INTISARI

Himpunan D disebut himpunan dominasi pada graf G=(V,E) jika setiap simpul dari himpunan V-D berikatan dengan paling sedikit satu simpul pada D. Pada penelitian ini dibahas mengenai fungsi dominasi Romawi dari suatu line graph. Line graph L(G) dari suatu graf G adalah graf yang merepresentasikan himpunan sisi dari G dan hubungan antara sisi-sisi pada G. Simpul-simpul pada L(G) dibentuk dari himpunan sisi G. Fungsi f disebut fungsi dominasi Romawi pada L(G) jika dan hanya jika untuk setiap simpul $v'\in V'$, $f: V'\to\{0,1,2\}$ *dan untuk setiap simpul* v'_i *dengan* $f(v'_i)=0$ *berikatan dengan paling sedikit satu simpul* v'_j *dengan* $f(v'_j)=2$. *Himpunan* V'_0, V'_1 *dan* V'_2 *merupakan subhimpunan dari V' yang dipengaruhi oleh fungsi f dengan* $V'_i=\{v'\in V' \mid f(v')=i\}$ *untuk i=0,1,2. Himpunan D' disebut himpunan dominasi Romawi pada L(G) jika* $D'= V'_1 \cup V'_2$ *dan* $f(V')=|V'_1|+2|V'_2|$ *merupakan bobot fungsi dominasi Romawi. Bilangan dominasi Romawi pada L(G) dinotasikan dengan* $\gamma_r(L(G))$ *yang merupakan nilai minimum dari f(V').*

***Kata Kunci**: Himpunan Dominasi, Bilangan Dominasi Romawi, Graf Terhubung*

PENDAHULUAN

Pemodelan graf adalah pemodelan matematika yang merepresentasikan himpunan obyek dan hubungan antara obyek-obyek tersebut. Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh Leonhard Euler seorang ahli matematika dari Swiss pada tahun 1736, ia mengembangkan konsep teori graf berawal dari persoalan jembatan Konigsberg yaitu mencari jalan dengan melalui setiap jembatan tepat satu kali dan kembali ke tempat semula [1]. Seiring perkembangan zaman, banyak sekali konsep-konsep teori graf yang terus berkembang dengan kajian dan terapan yang luas. Bentuk graf yang digunakan pada penelitian ini adalah *line graph*, dimana *line graph* dibentuk untuk merepresentasi himpunan sisi dan hubungan antarsisi pada suatu graf.

Salah satu konsep graf yang dibahas adalah himpunan dominasi. Ada beberapa jenis himpunan dominasi, yaitu *Signed Dominating Set*, *Restrained Dominating Set*, *Roman Dominating Set*, dan lain sebagainya. Jenis himpunan dominasi yang dibahas pada penelitian ini adalah *Roman Dominating Set* atau himpunan dominasi Romawi yang sering diaplikasikan pada sistem keamanan. Pada tahun 1999 Ian Stewart memperkenalkan artikelnya yang berjudul ”*Defend the Roman Empire*!”. Jumlah prajurit yang dialokasikan dianggap sebagai bobot dari fungsi dominasi Romawi. Penugasan prajurit yang optimal disebut bilangan dominasi Romawi [2]. Permasalahannya adalah pada lokasi mana saja prajurit dialokasikan dan berapakah jumlah minimal prajurit tersebut dapat dialokasikan. Penelitian ini membahas tentang fungsi dominasi Romawi pada suatu *line graph*. Tujuan penelitian adalah membentuk *line graph*, menentukan bilangan dominasi Romawi pada *line graph* serta mengkaji sifat-sifat pada fungsi dominasi Romawi. Penggunaan graf pada penelitian ini terbatas pada graf sederhana, terhingga, terhubung dan tak berarah.

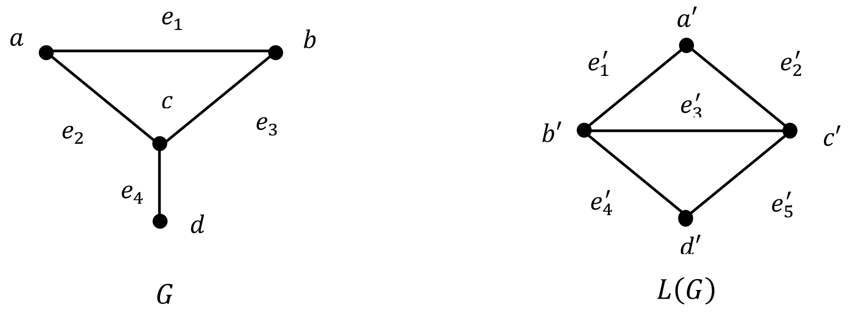
Sebelum menentukan bilangan dominasi Romawi dari graf G, terlebih dahulu dibentuk *line graph* $L(G)$. Untuk memperoleh $L(G)$, keterangan simpul, sisi dan derajat setiap simpul pada graf digunakan dalam pembentukan. Sisi pada G direpresentasikan sebagai simpul pada $L(G)$ dan simpul pada $L(G)$ saling berikatan jika sisi yang bersesuaian di G hadir pada simpul yang sama [3]. Selanjutnya dalam menentukan bilangan dominasi Romawi, perlu dikaji terlebih dahulu mengenai himpunan dominasi. Himpunan dominasi diperoleh dengan menghimpun simpul-simpul yang ikatannya mendominasi simpul lainnya [4]. Setiap simpul pada graf dipetakan sesuai dengan fungsi dominasi Romawi dimana simpul pada himpunan dominasi dipetakan dengan bobot 1 atau 2. Kemudian dapat ditentukan bilangan dominasi Romawi yang merupakan nilai minimum dari bobot fungsi tersebut [2,5].

LINE GRAPH

Pembentukan *line graph* dari suatu graf yaitu dengan menghimpun sisi pada suatu graf menjadi simpul pada *line graph.* Konsep *line graph* digunakan untuk mengetahui bagaimana hubungan antara sisi-sisi pada suatu graf, adapun definisi dan sifat pada *line graph* sebagai berikut.

Definisi 1 [3] *Line graph $L(G)$ dari suatu graf G adalah graf dimana simpul pada $L(G)$ merupakan sisi dari G dan dua simpul pada $L(G)$ dikatakan berikatan jika dan hanya jika sisi yang bersesuaian di G hadir pada simpul yang sama.*

Contoh 2 Diberikan suatu graf $G=(V,E)$ dengan $V=\{a,b,c,d\}$ dan $E=\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$. Akan dibentuk *line graph* $L(G)$ dari graf G, misalkan sisi e_1 bersesuaian dengan simpul a', e_2 dengan b', e_3 dengan c' dan e_4 dengan d'. Dengan Definisi 1 diperoleh $L(G)$ seperti pada Gambar 1. berikut:



Gambar 1. Graf G dan *Line Graph* $L(G)$

Dapat dilihat pada Gambar 1 simpul a' dan b' saling berikatan karena ada simpul a yang hadir pada sisi e_1 dan e_2. Sedangkan a' dan d' tidak berikatan karena tidak ada simpul yang sama hadir pada sisi e_1 dan e_4 di G. Derajat simpul dan banyaknya sisi pada *line graph* diberikan pada Sifat 3 berikut.

Sifat 3 [3] *Jika graf $G=(V,E)$ memiliki q sisi dan p simpul dengan setiap simpulnya berderajat $d(v_i)$ dimana $i=1,2,\ldots p$, maka berlaku sifat berikut:*

i. Derajat e pada $L(G)$ adalah $d(v_1)+d(v_2)-2$ dengan $e=v_1v_2$ merupakan sisi pada G.

ii. Banyaknya sisi q_L pada line graph $L(G)$ memenuhi $q_L=-q+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p}d(v_i)^2$.

Bukti:

i. Derajat sisi e dapat diperoleh dari jumlah derajat simpul yang hadir di e dikurangi satu karena terdapat satu derajat dari setiap simpul yang diperoleh dari sisi yang menghubungkan, sehingga derajat sisi e memenuhi:

$$d(e)=(d(v_i)-1)+\left(d(v_j)-1\right)=d(v_i)+d(v_j)-2$$

ii. Berdasarkan hubungan derajat dan sisi dari suatu graf yaitu $\sum_{i=1}^{p}d(v_i)=2q$, banyaknya sisi yang ada pada suatu *line graph* yaitu

$$q_L=\frac{\sum_{j=1}^{q}d(v_j')}{2}=\frac{d(v_1')+d(v_2')+d(v_3')+\cdots+d(v_q')}{2}$$

Selanjutnya dengan Sifat 3 pada bagian i diperoleh $d(v_j')=d(v_i)+d(v_k)-2$ untuk setiap $i,k=1,2,\ldots,p$ dan $v_i\neq v_k$. Misalkan $d(v_i)=x_i$ maka berlaku $\sum_{j=1}^{q}d(v_j')=\left(\sum_{i=1}^{p}d(v_i)x_i\right)-2q$. Karena $x_i=d(v_i)$ diperoleh banyaknya sisi pada $L(G)$ adalah

$$q_L=\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{p}d(v_i)^2\right)-q.\blacksquare$$

Setiap graf memiliki bentuk *line graph* yang berbeda-beda, adapun beberapa jenis graf [6] dengan masing-masing bentuk *line graph*nya diberikan pada Tabel 1.

Tabel 1. Graf dan Bentuk *Line Graph*

No.	Graf	*Line Graph*
1.	Graf *Cycle* dengan p simpul (C_p)	C_p
2.	Graf *Path* dengan p simpul (P_p)	P_{p-1}
3.	Graf Lengkap dengan p simpul K_p	$2(p-2)$-*regular*/ Graf teratur
4.	Graf Bintang dengan $p+1$ simpul ($K_{1,p}$)	K_p

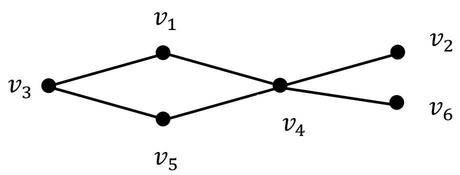
HIMPUNAN DOMINASI

Salah satu aplikasi dari himpunan dominasi adalah pada rute pemberhentian bus penjemputan siswa sekolah. Lokasi perhentian bus dianggap sebagai himpunan dominasi dimana titik henti bus ditentukan agar setiap siswa berjalan tidak jauh menuju bus. Adapun definisi dan sifat-sifat pada himpunan dominasi sebagai berikut:

Definisi 4 [4] *Himpunan D disebut himpunan dominasi jika setiap simpul dari $V - D$ saling berikatan dengan paling sedikit satu simpul pada D dengan $D \subseteq V$.*

Suatu graf $G = (V, E)$ tidak memiliki himpunan dominasi yang tunggal, dapat dibentuk beberapa himpunan dominasi dari subhimpunan V. Banyaknya simpul pada himpunan disebut kardinalitas dan kardinalitas terkecil dari himpunan dominasi disebut bilangan dominasi dan dinotasikan dengan $\gamma(G)$.

Contoh 5 Diberikan graf G dengan himpunan simpul $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ dan himpunan sisi $E = \{v_1v_3, v_1v_4, v_2v_4, v_3v_5, v_4v_5, v_4v_6\}$. Graf G dapat dilihat pada Gambar 2 berikut:



Gambar 2. Graf G

Akan dicari himpunan dominasi sesuai dengan Definisi 5, diperoleh beberapa himpunan dominasi, yaitu $A = \{v_3, v_4\}$ dimana simpul v_1 dan v_5 berikatan dengan v_3 dan simpul v_2 dan v_6 berikatan dengan v_4, himpunan dominasi lainnya yaitu $B = \{v_1, v_2, v_5, v_6\}$ dan $C = \{v_2, v_3, v_6\}$. Subhimpunan A dari V merupakan himpunan dominasi minimal dengan kardinalitas terkecil yaitu 2, sehingga bilangan dominasi dari G adalah $\gamma(G) = 2$.

Dalam membentuk himpunan dominasi minimal, perlu diperhatikan derajat pada setiap simpul. Besar derajat suatu simpul v menunjukkan seberapa banyak v berikatan dengan simpul lain.

Sifat 6 [7] *Jika graf $G = (V, E)$ dengan p simpul mempunyai sebuah simpul v berderajat $p - 1$, maka bilangan dominasi $\gamma(G)$ adalah satu.*

Bukti:

Jelas terbukti karena terdapat satu simpul v yang mendominasi semua simpul lainnya dengan kata lain v berikatan dengan setiap simpul lain di G. ■

Contoh 7 Setiap simpul v pada graf lengkap G merupakan himpunan dominasi minimal dengan bilangan dominasi $\gamma(G) = 1$ karena v berikatan dengan setiap simpul lain di G.

FUNGSI DOMINASI ROMAWI PADA *LINE GRAPH*

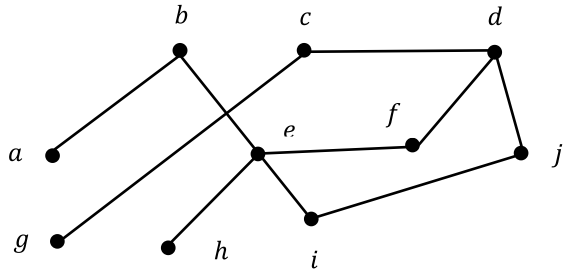
Himpunan dominasi Romawi adalah salah satu jenis himpunan dominasi yang dalam aplikasinya digunakan untuk sistem keamanan. Setiap simpul pada $L(G)$ dipetakan sesuai dengan fungsi dominasi Romawi dimana himpunan simpul yang dipetakan dengan 1 atau 2 merupakan himpunan dominasi Romawi. Bobot minimal dari pemetaan fungsi tersebut disebut sebagai bilangan dominasi Romawi. Adapun definisi dan sifat-sifat fungsi dominasi Romawi pada *line graph* sebagai berikut.

Definisi 8 [2] *Fungsi f disebut sebagai fungsi dominasi Romawi pada line graph $L(G) = (V', E')$ jika dan hanya jika untuk setiap simpul $v' \in V'$, $f: V' \to \{0,1,2\}$ dan untuk setiap simpul v_i' dimana $f(v_i') = 0$ berikatan dengan paling sedikit satu simpul v_j' dimana $f\left(v_j'\right) = 2$.*

Himpunan simpul pada $L(G)$ merupakan domain dengan kodomain $0, 1$ dan 2. Bobot dari fungsi dominasi Romawi (FDR) pada *line graph* adalah jumlahan dari nilai fungsi atau bayangan dari setiap simpul. Bobot minimum dari FDR disebut bilangan dominasi Romawi yang dinotasikan dengan $\gamma_r(L(G))$. Misalkan diberikan graf $G = (V, E)$ dengan *line graph* $L(G)$ dan fungsi $f: V' \to \{0,1,2\}$, himpunan V_0', V_1', dan V_2' merupakan subhimpunan dari V' yang dipengaruhi oleh fungsi f dengan $V_i' = \{v' \in V' | f(v') = i\}$ dan $|V_i'| = n_i$ untuk $i = 0,1,2$. Hubungan antara fungsi $f: V' \to \{0,1,2\}$ dan subhimpunan (V_0', V_1', V_2') selanjutnya ditulis dengan $f = (V_0', V_1', V_2')$ yang disebut sebagai fungsi-γ atau FDR pada $L(G)$. Suatu fungsi $f = (V_0', V_1', V_2')$ adalah FDR pada $L(G)$ jika himpunan V_2' mendominasi himpunan V_0' dimana $V_0' \subseteq N[V_2']$ dengan $N[V_2'] = N(V_2') \cup V_2'$, $N(V_2')$ merupakan himpunan semua simpul yang berikatan dengan $v' \in V_2'$ [5].

Lemma 9 [5] *Diketahui f suatu fungsi dominasi Romawi pada $L(G) = (V', E')$, bobot dari fungsi f adalah $f(V') = \sum_{v' \in V'} f(v') = n_1 + 2n_2$.*

Contoh 10 Kerajaan X adalah kerajaan yang terkenal akan kekayaan alam dan kemakmuran rakyatnya. Namun ada sebuah Kerajaan Y yang sangat dengki dan ingin menguasai kerajaan tersebut. Suatu hari ada seorang prajurit dari Kerajaan X mendapat isu buruk yang menyatakan bahwa Kerajaan Y akan melakukan serangan terhadap Kerajaan X. Mengingat adanya ancaman perperangan tersebut, Raja X menghimbau kepada pasukan keamanannya untuk melindungi kerajaan. Sesegera diumumkan oleh Raja X agar setiap hari diadakan latihan pada suatu lapangan sekitar kerajaan agar prajurit siap bertempur menghadapi lawan. Agar keadaan kerajaan tetap aman, raja memerintahkan beberapa prajurit untuk menjaga lokasi kerajaan. Ada sepuluh barak pada kerajaan X yaitu barak $a, b, c, d, e, f, g, h, i,$ dan j sedangkan jalan yang menghubungkan dari suatu barak ke barak lainnya dapat dilihat pada Gambar 3 berikut:

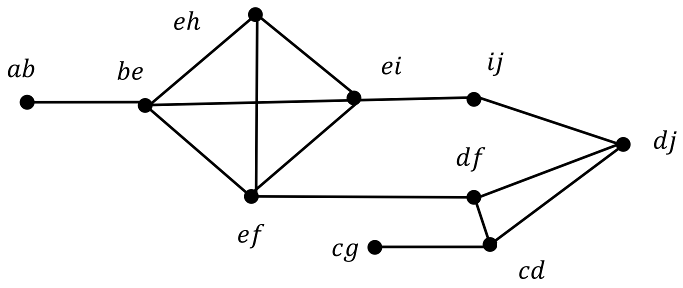


Gambar 3. Denah Lokasi Kerajaan X

Strategi penugasan para prajurit yaitu dengan dialokasikan pada ruas jalan yang menghubungkan suatu barak ke barak lain. Tentukan bagaimana strategi penugasan prajurit yang optimal sehingga keadaan kerajaan tetap terkendali.

Penyelesaian:

Setiap prajurit akan dialokasikan di setiap ruas jalan, dengan demikian dibentuk *line graph* dari graf pada Gambar 3 agar dapat mudah diatur strategi penugasan prajurit pada ruas jalan kerajaan yang diilustrasikan pada Gambar 4 berikut.



Gambar 4. *Line Graph* pada Lokasi Kerajaan X

Dalam mengoptimalkan penugasan prajurit, dicari himpunan dominasi minimal dari $L(G)$, yaitu $D = \{be, cd, ij\}$. Sedemikian sehingga diperoleh $f(be) = 2, f(cd) = 2, f(ij) = 1$ dimana $f(V') = 5$. Jadi, dalam mengoptimalkan penugasan prajurit untuk menjaga keamanan lokasi kerajaan dibutuhkan minimal lima orang prajurit dengan posisi dua orang prajurit di ruas jalan yang menghubungkan barak b dan e, dua orang prajurit lainnya di ruas jalan yang menghubungkan barak c dan d, dan satu prajurit lainnya di ruas jalan yang menghubungkan barak i dan j sedangkan ruas jalan lainnya tetap dapat terkendali karena berhubungan dengan ruas jalan yang dijaga prajurit.

Pada Tabel 1 telah disajikan bentuk *line graph* dari beberapa jenis graf yang memiliki bentuk yang berbeda-beda. Selanjutnya diberikan Tabel 2 yang memuat beberapa jenis graf [6] dengan bilangan dominasi Romawi pada *line graph*-nya.

Tabel 2. Hubungan Graf dan Bilangan Dominasi pada *Line Graph*

No.	Graf	Bilangan Dominasi Romawi
1.	C_p	$\gamma_r\left(L(C_p)\right) = \frac{2p}{3}$, untuk $p \equiv 0 \pmod 3$ $\gamma_r\left(L(C_p)\right) = \frac{2(p-1)}{3} + 1$, untuk $p \equiv 1 \pmod 3$ $\gamma_r\left(L(C_p)\right) = \frac{2(p+1)}{3}$, untuk $p \equiv 2 \pmod 3$
2.	P_p	$\gamma_r\left(L(P_p)\right) = \frac{2p}{3}$, untuk $p \equiv 0 \pmod 3$ $\gamma_r\left(L(P_p)\right) = \frac{2(p-1)}{3}$, untuk $p \equiv 1 \pmod 3$. $\gamma_r\left(L(P_p)\right) = \frac{2(p-2)}{3} + 1$, untuk $p \equiv 2 \pmod 3$
3.	K_p	$p - 1$
4.	$K_{1,p}$	2

Pemetaan simpul dengan FDR dalam memperoleh bilangan dominasi Romawi dapat mengakibatkan beberapa sifat seperti pada simpul, sisi maupun himpunannya. Sifat-sifat fungsi dominasi Romawi pada *line graph* yang berlaku diberikan pada teorema-teorema berikut:

Teorema 11 [5] *Diberikan graf G dengan line graph $L(G)$ dan fungsi dominasi Romawi $f = (V_0', V_1', V_2')$ pada $L(G)$, jika $f(V') = \gamma_r\left(L(G)\right)$ maka diantara sebarang $v_1' \in V_1'$ dan $v_2' \in V_2'$, ada sebuah simpul $v' \in V_0'$.*

Bukti:

Diberikan suatu graf G dengan *line graph*nya $L(G)$. Misalkan terdapat suatu *walk* dengan himpunan simpulnya $V' = \{v'_a, v'_b, v'_c\}$ atau $v'_a \to v'_b \to v'_c$. Diandaikan tidak terdapat v'_0 diantara v'_1 dan v'_2. Didefinisikan $f(v'_a) = 1$, $f(v'_b) = 1, f(v'_c) = 2$ dan f adalah suatu FDR sehingga $f(V') = \gamma_r\big(L(G)\big)$. Misalkan terdapat fungsi lain f' yang didefinisikan dengan $f'(v'_a) = 1$, $f'(v'_b) = 0, f'(v'_c) = 2$, demikian diperoleh $f'(V') < f(V')$. Pengandaian kontradiksi karena ada fungsi f' dengan $f'(V') = \gamma_r\big(L(G)\big)$ yang menunjukkan bahwa ada simpul v'_0 diantara simpul v'_1 dan v'_2. ■

Hubungan antara bilangan dominasi dan bilangan dominasi Romawi ditunjukkan pada Teorema 12.

Teorema 12 [5] *Untuk setiap graf terhubung G, berlaku*

$$\gamma\big(L(G)\big) \le \gamma_r\big(L(G)\big) \le 2\gamma\big(L(G)\big)$$

Bukti:

Diberikan suatu graf G dengan *line graph* dari G yaitu $L(G)$. Misalkan diberikan FDR $f = (V'_0, V'_1, V'_2)$ pada $L(G)$, himpunan $V'_1 \cup V'_2$ adalah himpunan dominasi Romawi pada $L(G)$ dengan $|V'_1 \cup V'_2|$ merupakan bilangan dominasi dan bilangan dominasi Romawinya adalah $|V'_1| + 2|V'_2|$. Diperoleh hubungan $\gamma\big(L(G)\big) = |V'_1 \cup V'_2| \le |V'_1| + 2|V'_2| = \gamma_r(L(G)$. Selanjutnya misalkan diberikan himpunan dominasi minimum D' pada $L(G)$. Didefinisikan $V'_0 = V' - D'$, $V'_1 = \emptyset$, $V'_2 = D'$ dan fungsi $g = (V'_0, V'_1, V'_2)$. Himpunan V'_0 didominasi oleh V'_2 dengan bilangan dominasinya $|V'_2|$ dan bilangan dominasi Romawinya $2|V'_2|$, diperoleh $\gamma_r\big(L(G)\big) = 2|V'_2| = 2|D'| = 2\gamma\big(L(G)\big)$. Selanjutnya, misalkan $V'_1 \neq \emptyset$, dan $D' = V'_1 \cup V'_2$, diperoleh $\gamma_r\big(L(G)\big) = |V'_1| + 2|V'_2| \le 2|D'| = 2\gamma\big(L(G)\big)$. ■

Sifat-sifat fungsi dominasi Romawi pada suatu *line graph* yang ditunjukan pada Teorema 13 berikut terpenuhi jika bobot dari fungsi dominasi Romawi merupakan bilangan dominasi Romawi.

Teorema 13 [5] *Diberikan graf G dengan line graph $L(G)$. Jika $f = (V'_0,\ V'_1, V'_2)$ merupakan fungsi dominasi Romawi pada $L(G)$ dan $f(V') = \gamma_r\big(L(G)\big)$, maka berlaku sifat berikut:*

i. Setiap simpul pada $\langle V'_1\rangle$ maksimum berderajat satu.
ii. Tidak ada sisi yang menghubungkan simpul v'_1 dan v'_2 pada $L(G)$.
iii. Setiap simpul v'_0 berikatan dengan paling banyak dua simpul v'_1.
iv. V'_2 merupakan himpunan dominasi dari himpunan $H = L(G)[V'_0 \cup V'_2]$ dimana H adalah graf bagian dari $L(G)$.

Bukti:

Diberikan suatu graf G dengan *line graph* $L(G)$ dan fungsi dominasi Romawi pada $L(G)$ adalah $f = (V'_0,\ V'_1, V'_2)$.

i. Diandaikan ada simpul pada $\langle V'_1\rangle$ berderajat lebih dari satu. Misalkan terdapat simpul yang membentuk *path* yaitu $u' \to v' \to w' \to x' \to y'$ dengan $u', v', w', x', y' \in V'_1$ dengan fungsi f dimana $f(u') = 1, f(v') = 1, f(w') = 1, f(x') = 1, f(y') = 1$. Diberikan fungsi lain yaitu f' yang merupakan FDR dimana $f'(u') = 0, f'(v') = 2, f'(w') = 0, f'(x') = 1, f'(y') = 1$ sehingga diperoleh himpunan $\langle V'_1\rangle = \{x', y'\}$ dengan setiap simpul pada $\langle V'_1\rangle$ berderajat satu. Dikarenakan $f'(V') < f(V')$, diperoleh $f(V') > \gamma_r\big(L(G)\big)$ hal ini menunjukkan bahwa setiap simpul pada $\langle V'_1\rangle$ hanya berderajat satu.
ii. Diandaikan terdapat sisi $u'v' \in E\big(L(G)\big)$ yang menghubungkan simpul $v'_1 \in V'_1$ dan $v'_2 \in V'_2$, dimana $f(u') = 1$ dan $f(v') = 2$. Diberikan fungsi f' dengan $f'(u') = 0$ dan $f'(v') = 2$. Diperoleh $f'(V') < f(V')$ sehingga $f(V') > \gamma_r\big(L(G)\big)$, jadi v'_1 dan v'_2 tidak saling terhubung.
iii. Diandaikan terdapat simpul $v'_0 \in V'_0$ yang berikatan dengan simpul $a'_1, b'_1, c'_1 \in V'_1$. Diberikan fungsi $g = (U'_0, U'_1, U'_2)$ dengan $U'_0 = (V'_0 \cup \{a'_1, b'_1, c'_1\}) - \{v'_0\}, U'_1 = V'_1 - \{a'_1, b'_1, c'_1\}$ dan $U'_2 = V'_2 \cup \{v'_0\}$. Diperoleh bobot dari FDR g yaitu $(V') = |U'_1| + 2|U'_2| = (n_1 - 3) + 2(n_2 + 1)$ $= \big((n_1 + 2n_2) - 1\big) < f(V') = \gamma_r\big(L(G)\big)$. Dengan U'_0 yang didominasi oleh U'_2, diperoleh $g(V') < f(V')$. Hal ini menunjukkan ada fungsi lain yaitu g yang menghasilkan bobot minimum

dengan kata lain v_0' berikatan dengan paling banyak dua simpul v'_1.

iv. Diketahui himpunan V_0' didominasi oleh V_2' artinya sebarang simpul v_0' berikatan dengan simpul v_2'. Misalkan dibentuk graf bagian H dari $\big(L(G)\big)$ dengan $H = (U', F')$ dimana $U' = V' - V_1'$. Setiap simpul v_1' tidak berikatan dengan simpul v_2' dan himpunan V_0' didominasi oleh V_2' sehingga sebarang simpul $u_0' \in U_0' = V_0'$ berikatan dengan simpul $u_2' \in U_2' = V_2'$ hal ini menunjukkan bahwa himpunan $U_2' = V_2'$ merupakan himpunan dominasi pada H. ■

Pohon adalah suatu graf terhubung yang tidak memuat *cycle* sehingga hanya ada lintasan tunggal yang menghubungkan sebarang pasang simpul berbeda [1]. Salah satu contoh struktur pohon adalah silsilah keluarga. Adapun hubungan bilangan dominasi Romawi pada suatu pohon T dan bilangan dominasi Romawi pada $L(T)$ ditunjukkan pada Teorema 14 berikut:

Teorema 14 [5] *Jika T adalah pohon, maka berlaku $\gamma_r(T) \geq \gamma_r\big(L(T)\big)$.*

Bukti:

Diberikan suatu pohon T dan fungsi dominasi Romawi f dimana $f: V_i \to \{0,1,2\}, i = 0,1,2$ dengan himpunan dominasi Romawi pada T yaitu $D = V_1 \cup V_2$ dan himpunan dominasi Romawi pada $L(T)$ yaitu $D' = V_1' \cup V_2'$. Himpunan D dan D' masing-masing mendominasi V_0 dan V_0'. Misalkan himpunan D memuat tepat satu simpul pemutus yang berikatan dengan paling sedikit dua simpul terminal diperoleh $L(T) = K_p$. Selanjutnya, untuk $v \in V(T)$ dan terdapat $vv_j \in E(T), j = 1,2, \dots, p$ yang merupakan $vv_j \in V\big(L(T)\big)$. Jika $v \in D$ maka ada tepat satu $vv_j \in D'$, hal ini menunjukkan bahwa $|D| = |D'|$ atau $\gamma_r(T) = \gamma_r\big(L(T)\big)$. Selanjutnya, misalkan himpunan D memuat paling sedikit dua simpul pemutus yang berikatan dengan simpul terminal. Simpul pada himpunan V_1 dan V_2 tidak saling berikatan tetapi terdapat satu $v' \in V_0'$ diantara V_1' dan V_2'. Misalkan $v_i v_j = v'$, jika $v_i \in D$ atau $v_j \in D$ maka $v' \in D'$. Sifat ini menunjukkan bahwa $|D| > |D'|$ atau $\gamma_r(T) > \gamma_r\big(L(T)\big)$. ■

Pohon merupakan graf yang memuat himpunan simpul akhir dan setiap simpul yang bukan simpul akhir merupakan simpul pemutus. Bilangan dominasi Romawi pada *line graph* tidak melebihi banyak simpul akhir jika setiap simpul pemutus pada pohon berikatan dengan paling sedikit satu simpul akhir.

Teorema 15 [5] *Untuk setiap pohon T, jika setiap simpul yang bukan simpul akhir pada T berikatan dengan paling sedikit pada sebuah simpul akhir, maka $\gamma_r\big(L(T)\big) \leq p - m$ dimana m adalah banyaknya simpul pemutus pada T dan p adalah banyaknya simpul di T.*

Bukti:

Diketahui setiap simpul yang bukan simpul akhir berikatan dengan paling sedikit pada sebuah simpul akhir, dengan kata lain simpul yang bukan simpul akhir tersebut merupakan simpul pemutus di T. Misalkan diberikan himpunan simpul pemutus pada T yaitu $F = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ dimana $|F| = m$ dan karena setiap simpul pemutus di T berikatan dengan paling sedikit satu simpul akhir di T, artinya $p - m \geq m$ dengan $p - m$ adalah banyaknya simpul akhir. Karena untuk setiap simpul pemutus berikatan dengan simpul akhir, maka ada dua kemungkinan, yaitu:

a) Jika m adalah bilangan genap, maka untuk sebarang dua simpul pemutus v_i dan v_j yang saling berikatan pada satu sisi e mengakibatkan $e \in D'$ dimana untuk setiap $e \in D'$, e tidak hadir pada simpul yang sama di T. Hal ini menunjukkan bahwa $|D'| = \frac{m}{2}$ atau $\gamma_r\big(L(T)\big) = m$. Karena banyaknya simpul akhir $p - m \geq m$, diperoleh $p - m \geq \gamma_r\big(L(T)\big)$. Jika setiap simpul pemutus berikatan dengan tepat satu simpul akhir, maka $p - m = \gamma_r\big(L(T)\big)$ karena $p - m = m$.

b) Jika m adalah bilangan ganjil, maka untuk sebarang dua simpul pemutus v_i dan v_j yang saling berikatan pada satu sisi misalkan e mengakibatkan $e \in D'$ dimana untuk setiap $e \in D'$, e tidak hadir pada simpul yang sama di T dan terdapat satu $e = v_i v_j$ dimana v_i atau v_j salah satunya merupakan simpul akhir. Hal ini menunjukkan bahwa $|D'| = \frac{m}{2} + \frac{1}{2}$ atau $2|D'| = m + 1$. Misalkan setiap simpul pemutus berikatan dengan tepat satu simpul akhir, hal ini mengakibatkan terdapat dengan tunggal $v' \in V_1'$, sedemikian sehingga $\gamma_r = 2|D' - 1| + 1 = m$ diperoleh $p - m = \gamma_r(L(T))$. Sebaliknya, jika terdapat simpul pemutus yang berikatan dengan lebih dari satu akhir, mengakibatkan $p - m > \gamma_r(L(T))$. ∎

PENUTUP

Berdasarkan pembahasan yang telah dilakukan, diperoleh beberapa simpulan yang terdapat pada fungsi dominasi Romawi pada *line graph* sebagai berikut:

1. Simpul pada suatu *line graph* $L(G)$ dibentuk dari himpunan sisi graf G dan sepasang simpul pada $L(G)$ saling berikatan jika sisi yang bersesuaian di G hadir pada simpul yang sama.
2. Jika bobot dari fungsi dominasi Romawi merupakan bilangan dominasi Romawi, maka sifat-sifat fungsi dominasi Romawi yang berlaku adalah sebagai berikut:
   a. Tidak ada sisi yang menghubungkan simpul v_1' dan v_2'.
   b. Terdapat suatu simpul v_0' diantara simpul v_1' dan v_2'.
   c. Setiap simpul di himpunan $\langle V_1' \rangle$ maksimum berderajat satu.
   d. Setiap simpul v_0' berikatan dengan paling banyak dua simpul v_1'.
   e. Himpunan V_2' merupakan himpunan dominasi dari $H = L(G)[V_0' \cup V_2']$.
   f. Berlaku hubungan antara bilangan dominasi dan bilangan dominasi Romawi sebagai berikut:
   $$\gamma(L(G)) \leq \gamma_r(L(G)) \leq 2\gamma(L(G))$$
   g. Bilangan dominasi Romawi pada suatu pohon lebih besar atau sama dengan bilangan dominasi Romawi dari *line graph*-nya.
   h. Jika pada pohon setiap simpul pemutus berikatan dengan paling sedikit satu simpul akhir maka banyaknya simpul akhir lebih besar atau sama dengan bilangan dominasi Romawinya.

DAFTAR PUSTAKA

[1]. Slamet S, Makaliwe H. *Matematika Kombinatorik*. Jakarta: Elek Media Komputindo;1991.
[2]. Henning MA, Hedetniemi ST. Defending the Roman Empire: A New Strategy. Discrete Mathematic [Internet]. 2003 [cited 2014 Oct 25]; 266:239-251. Available from: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0012365X02008117.
[3]. Harary F. *Graph Theory* [monograph online]. Reading Massachusetts, Addison-Wesley Publishing Company; 1969 [cited 2014 Nov 13]. Available from: NetLibrary.
[4]. Haynes TW, Hedetniemi ST, Slater PJ. *Fundamentals of Domination in Graphs* [monograph online]. New York, Marcel Dekker; 1998 [cited 2014 Nov 13]. Available from: NetLibrary.
[5]. Muddebihal MH, Basavarajappa D, Sedamkar AR. Roman Domination in Line Graphs. *Canadian Jounal on Science and Engineering Mathematics*. 2010; 1(4):69-79.
[6]. Purwanto H, Indriani G, Dayanti E. *Matematika Diskret*. Jakarta: Ercontara Rajawali; 2006.
[7]. Santoso B, Djuwandi, Soelistyo RH. Bilangan Dominasi dan Bilangan Kebebasan Graf Bipartit Kubik. *J. Mat* [Internet]. 2012 [cited 2014 Aug 28]; 15:12-16. Available from: http://www.ejournal.undip.ac.id/index.php/matematika/article/viewFile/4904/pdf.

YESI JANUARTI : FMIPA Untan, Pontianak, yesijanuarti@yahoo.co.id
MARIATUL KIFTIAH : FMIPA Untan, Pontianak, kiftiahmariatul@ymail.com
NILAMSARI KUSUMASTUTI: FMIPA Untan, Pontianak, uminilam@yahoo.com